الفصل السادس

جبر المصفوفات Matrix Algebra

تعريف

ليكن K حقلاً تبديلياً وليكن لدينا العددين الطبيعيين $p,n\geq 1$ نسمي مصفوفة بأمثال من الحقل K، التطبيق $A:\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p\to K;\ (i,j)\to a_{ij}$ ونرمز لهذا التطبيق بـ:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

حيث a_{ij} يوجد في نقطة تقاطع السطر رقم (i) مع العمود رقم (j). ونرمز لمجموعة المصفوفات فوق الحقل K بـ $M_{n\times p}(K)$ و التي تمثل مجموعة المصفوفات ذات $n\times p$ عنصراً من k وتقول إن A هي مصفوفة من الدرجة $n\times p$ أو نقول أن A هي مصفوفة بـ n سطراً و p عموداً من عناصر الحقل k.

ملاحظة

من أجل $i=1,\dots,n$ فإنها نرمز بـ $R_i(A)=(a_{i1},\dots,a_{ip})\in K^n$ للشعاع السطري رقم (i) من المصفوفة A.

ومن أجل $j=1,\dots,p$ فإننا نرمز بـ $C_j(A)=(a_{j1},\dots,a_{jn})\in K^n$ للشعاع العمودي رقم j من المصفوفة A.

1. العمليات على المصفوفات

1- المصفوفات المتساوية و جمع المصفوفات والمصفوفات الأولية

لتكن A,B مصفوفتين من $M_{n\times p}(K)$ حيث $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$

- $A=B \Leftrightarrow \forall \quad (i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\quad a_{ij}=b_{ij}$
- $A+B=(C_{ij})$ هي مصفوفة من $M_{n\times p}(K)$ وحيث

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

- إذا كان $\lambda\in K$ فعندئذ نعرف $\lambda A\in M_{n\times p}(K)$ بالشكل التالي:

$$\lambda.A=(d_{ij});\quad \forall \quad (i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\quad d_{ij}=\lambda.a_{ij}$$

- المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي كل عناصرها الحيادي 0_k أي أن:

$$0_{n\times p}=(f_{ij});\quad \forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\quad f_{ij}=0_K$$

مثال

لتكن A و B مصفوفتين من الدرجة 3×4 حيث:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\5&3&0&1\\9&2&1&6\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad A+B=\begin{pmatrix}2&4&3&7\\7&9&7&9\\18&12&12&18\end{pmatrix}$$

$$2A=\begin{pmatrix}2&4&0&6\\10&6&0&2\\18&4&2&12\end{pmatrix}\quad \&\quad 2A+B=\begin{pmatrix}3&6&3&10\\12&12&7&10\\27&14&13&24\end{pmatrix}$$

$$0A=0B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

تعريف المصفوفة الأولية

نعرف المصفوفة الأولية $E_{kl} \in M_{n\times p}(K)$ حيث $k \in \mathbb{N}_n, l \in \mathbb{N}_p$ بالشكل التالي:

$$E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

أي هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفاراً ما عدا العنصر الذي يقع في السطر k والعمود l حيث هذا العنصر يساوي 1.

ملاحظة

δ_{kl} هو ما يسمى برمز كرونيكر ويعرف كما يلي $\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$

مبرهنة (1)

إن $(M_{n\times p}(K), +, .)$ هو فضاء شعاعي منتهي ذو $n \times p$ بعداً وأساسه الجملة المكونة من المصفوفات E_{kl} حيث $(k,l) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$.

الإثبات:

إثبات إن $(M_{n\times p}(K), +, .)$ فضاء شعاعي ينتج مباشرة من تعريف الفضاء الشعاعي. وهو منتهي البعد لأن أساسه هي الجملة المكونة من المصفوفات E_{kl}. ويمكن إثبات ذلك بسهولة

$$\forall \quad A \in M_{n,p}, \quad A = \sum_k \sum_l a_{kl} E_{kl}$$

أي هي مولدة وهي حرة لأن بفرض أن $(\lambda_{kl}) \in K^{n\times p}$ فإن $\sum_k \sum_l \lambda_{kl} E_{kl} = 0_{n\times p}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1p} \\ & & \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_{kl} = 0, \forall (k,l) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$$

وبالتالي مجموعة المصفوفات الأولية تشكل أساساً أي الفضاء $M_{n,p}(K)$ بعده $n \times p$.

توضيح:

ليكن $A\in M_{2\times 2}(R)$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\5&9\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+9\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\5&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\5&9\end{pmatrix}=A$$

إذن $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

هي جملة مولدة وكذلك هي حرة لأن $\lambda_{11}E_{11}+\lambda_{12}E_{12}+\lambda_{21}E_{21}+\lambda_{22}E_{22}=0_{22}$

$$\Rightarrow \lambda_{11}=\lambda_{12}=\lambda_{12}=\lambda_{22}=0$$

2- منقول مصفوفة

لتكن $A\in M_{n\times p}(K)$ نسمي المصفوفة $^{t}A\in M_{p\times n}(K)$ المعرفة بالشكل التالي $^{t}A=(\tilde{a}_{ij})$ منقول المصفوفة A حيث $\forall (i,j)\in \mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\tilde{a}_{ij}=a_{ji}$. إن التطبيق $T:M_{n\times p}(K)\rightarrow M_{p\times n}(K);A\rightarrow {}^{t}A$ هو تشاكل تقابلي.

مثال

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&9\end{pmatrix}$ فإن $^{t}A=\begin{pmatrix}1&5\\2&9\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&4\\5&9&0\end{pmatrix}\Rightarrow {}^{t}B=\begin{pmatrix}1&5\\2&9\\4&0\end{pmatrix}$$

ملاحظة

نسمي مصفوفة سطرية (أو مصفوفة عمودية) كل عنصر من $M_{1\times p}(K)$ (أو من $M_{n\times 1}(K)$) على الترتيب.

3- جداء المصفوفات (Matrix Multiplication)

لتكن $A=(a_{ij})\in M_{n\times m}(K)$ و $B=(b_{jk})\in M_{m\times p}(K)$. نعرف جداء المصفوفتين B,A ونرمز له بـ AB بالشكل التالي: $AB=(c_{ij})\in M_{n\times p}(K)$ حيث:

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p;\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

مثال

لتكن $X\in M_{1\times 3}(\mathbb{R}),Y\in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ حيث $X=(a,b,c),Y={}^t(x,y,z)$ عندئذٍ

$$XY=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=ax+by+cz\in\mathbb{R}$$

أي جداء XY هو عدد ثابت.

أما YX فتحسب كما يلي $YX=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xa & xb & xc\\ ya & yb & yc\\ za & zb & zc\end{pmatrix}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

لاحظ أن: $XY\neq YX$

مثال

لتكن $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ عندئذٍ

$$AB=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}$$

لاحظ أن: $BA=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b & 2a+4b\\ c+3d & 2c+4d\end{pmatrix}$

لاحظ أيضاً أنه ليس من الضروري أن تكون $AB=BA$. يوجد الكثير من القيم لـ a,b,c,d بحيث يكون $AB\neq BA$.

خواص جداء المصفوفات (Matrix Multiplication)

ملاحظة

إذا كانت $A\in M_{n\times m}(K),\quad B\in M_{m\times p}(K)$ فيمكن أن نكتب AB كما يلي:

$$C=AB=\begin{pmatrix} R_1(A)C_1(B) & \cdots & R_1(A)C_p(B) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n(A)C_1(B) & \cdots & R_n(A)C_p(B) \end{pmatrix}$$

مبرهنة (2)

إذا كانت $A\in M_{n\times m}(K)$, $B\in M_{m\times p}(K)$ فإن $AB=\left(AC_1(B)...AC_p(B)\right)$

الإثبات:

$$AC_j(B)=\begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix} C_j(B)=\begin{pmatrix} R_1(A)C_j(B) \\ \vdots \\ R_n(A)C_j(B) \end{pmatrix};1\le j\le p.$$

نتيجة (1)

1- إذا كانت $B\in M_{m\times 1}(k)$ أي $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ فإن $AB=b_1C_1(A)+\cdots+b_mC_m(A)$.

2- إذا كانت $A\in M_{1\times m}(k)$ أي $A=(a_1,...,a_n)$ فإن $AB=a_1R_1(A)+\cdots+a_mR_m(A)$

الإثبات:

1- لاحظ أن

$$AB=\begin{pmatrix} R_1(A) \\ \vdots \\ R_n(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+\cdots+a_{1m}b_m \\ \vdots \\ a_{n1}b_1+\cdots+a_{nm}b_m \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1m}b_m \\ \vdots \\ a_{nm}b_m \end{pmatrix}$$
$$=b_1C_1(A)+\cdots+b_mC_m(A)$$

2- يبرهن بطريقة مشابهة.

مبرهنة (3)

لتكن $A\in M_{n\times m}(K)$ و $B\in M_{m\times p}(K)$ و $C\in M_{p\times q}(K)$ عندئذ:

1- $A(BC)=(AB)C$ (الجداء تجميعي).

2- $\forall\lambda\in k;\quad \lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$

3- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (الجداء توزيعي على الجمع).

4- $0_k A=0_{n\times m},\quad A0_{m\times p}=0_{n\times p}$

الإثبات:

إن $A(BC)=A\left(B\left(C_1(C),...,C_q(C)\right)\right)$ حيث $C_i(C)$ هو العمود رقم j من المصفوفة C. استناداً إلى المبرهنة (2) نجد أن $A(BC)=A\left(BC_1(C),...,BC_q(C)\right)$

إذن $A(BC)=\left(A\left(BC_1(C)\right),...,A\left(BC_q(C)\right)\right)$. بما أن $C_j(C)=\begin{pmatrix}c_{1j}\\ \vdots\\ c_{pj}\end{pmatrix}$ عندئذ:

$BC_j=c_{1j}C_1(B)+\cdots+c_{pj}C_p(B),\ j=1,\cdots,q$. حسب النتيجة (1) نجد أن:

$$\begin{aligned}A\left(BC_j\right)&=A\left(c_{1j}C_1(B)+\cdots+c_{pj}C_p(B)\right)\\&=c_{1j}AC_1(B)+\cdots+c_{pj}AC_p(B)\\&=\left(AC_1(B)+\cdots+AC_p(B)\right)C_j=(AB)C_j\end{aligned}$$

إذاً $A(BC)=(AB)C$. إن إثبات بقية الخواص ينتج مباشرة من التعاريف.

مبرهنة (4)

لتكن $A\in M_{n\times m}(K)$ و $B\in M_{m\times p}(K)$ عندئذ

1- ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

2- ${}^t\left({}^tA\right)=A$

3- $\forall(\lambda,\mu)\in K^2,\ {}^t(\lambda A+\mu B)=\lambda\,{}^tA+\mu\,{}^tB$

الإثبات سهل ويترك كتمرين.